ISSUE 11 June 2021
مجلة العلوم الإنسانية والتطبيقية
Journal of Humanitarian and Applied Sciences
العدد 11 يونيو 2021

تحويلات ريس على زمر هايزنبرغ

سهى علي سلامه

قسم الرياضيات_ كلية العلوم_ جامعة البعث_ سوريا

Soha.ali.salamah.111@gmail.com

الملّخص: نُميّز في هذا البحث تحويلات ريس ذات الرتب العليا على زمرة هايزنبرغ، و نُبيّن أنّها تحقق حدوداً حرّة البعد تحت بعض الفرضيّات على المضاريب.

سنقدّم زمرة هايزنبرغ المقلّصة، و نُبيّن التقديرات حرّة البعد لتحويلات ريس على زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n$، و التي تعتمد بشكلٍ كبيرٍ على بنيّة التمديد لـ $\mathbb{H}^n$، الأمر الذي لا يتحقق لأجل زمرة هايزنبرغ المقلّصة.

ومن ثمّ فإنّه بالإمكان أن نُبيّن أنّ تحويلات ريس على زمرة هايزنبرغ (أو زمرة هايزنبرغ المقلّصة) هي بمثابة مؤثرات تأخذ قيمها كمضاريب لتحويل فورييه.

الكلمات المفتاحيّة: زمرة هايزنبرغ، مؤثر لابلاس، مؤثر لابلاس الجزئي، حدود حرة البعد، تقديرات حرة البعد.

Abstract: In this paper, we characterize higher order Riesz transforms on the Heisenberg group and show that they satisfy dimension_ free bounds under some assumptions on the multipliers. We introduce the reduced Heisenberg group, and we show that dimension_ free estimates for Riesz transforms on $\mathbb{H}^n$, which depends very much on the dilation structure of $\mathbb{H}^n$, does not work for the reduced Heisenberg group. However, we can view the Riesz transforms on the Heisenberg group (reduced Heisenberg group) as an operator valued multiplier for the Fourier transform.

Keywords: Heisenberg group, The Laplacian, Sub-Laplacian, dimension – free bounds, dimension free estimate.

المقدّمة:

إن دراسة االباحثين لتحويلات ريس على فضاءات إقليدية له تاريخ طويل جداً و أهمية كبيرة حيث تقدّم هذه التحويلات أهم الأمثلة عن المؤثرات التكاملية الشاذة Calderón-Zygmund. و لها مجموعة متنوعة من التطبيقات خاصة في مجال المعادلات التفاضلية الجزئية.

إن تحويلات ريس الكلاسيكية ترتبط بمؤثر لابلاس على $\mathbb{R}^n$, و بالتالي فإنّه من الطبيعي دراسة ما يشابه هذه التحويلات في سياقٍ آخر على مؤثرات تفاضلية جزئية ناقصية آخرى.

لقد تمّت دراسة ما يشابه هذه التحويلات في سياق زمر لي المتراصة, و الفضاءات الريمانية المتراصة و غير المتراصة، و زمر لي عديمة القوى، و بشكلٍ خاص على زمرة هايزنبرغ حيث درس العديد من المؤلفين جوانب مختلفة من تحويلات ريس على هذه الزمرة الشهيرة. [6]

و في بعض الحالات أثبت الباحثون حدوداً حرة البعد لتحويلات ريس.

و في الآونة الأخيرة نجد أن المحدودية لتحويلات ريس على الفضاءات المنتظمة دُرست في عدّة سياقات، حيث نشأت فكرة أخذ تحويلات ريس على فضاءات منظمة من خلال عدّة أوراق بحثية للعالم Ciaurri، في حين دُرست التقديرات حرة البعد لتحويل ريس على $\mathbb{H}^n$ من قبل Coulhon و آخرين.

مشكلة البحث: سنتعامل في هذا البحث مع تحويلات ريس ذات الرتب العليا على زمرة هايزنبرغ، و نُبيّن أنّها تحقق حدوداً حرّة البعد تحت بعض الفرضيات.

مواد البحث و طرائقه:

تعريف $(\mathbf{1})$: $[7]$،$[\mathbf{13}]$ إنّ زمرة هايزنبرغ هي زمرة من الانسحابات للنصف العلوي لفضاء سيجل في الفضاء $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n+1}}$(the Siegel upper half space)، ويعرّف عليها قانون التشكيل بالعلاقة:

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})(u,v,s)=\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(u.y-v.x)\right)$$

ويُرمز لهذه الزمرة بالرمز $\mathbb{H}^n$.

كما يتحقق أن $\mathbb{H}^n=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ وفق قانون تشكيلٍ مكافئ للقانون السابق يُعطى بالعلاقة:

$$(z,t)(w,s)=\left(z+w,t+s+\frac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

تعريف $(\mathbf{2})$: **التمثيل** (**Representation**): $[12],[10],[4]$

التمثيل π للزمرة G هو تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة $GL(V)$ (زمرة المؤثرات الخطيّة القابلة للعكس على V)، حيث V هو فضاء متجهي عقدي غير صفري، نعتبره كفضاء تمثيل لـ π.

تعريف $(\mathbf{3})$: **التمثيل الواحدي** (**Unitary representation**): $[\mathbf{19}]$,$[\mathbf{4}]$

ندعو التمثيل π تمثيلاً واحدياً إذا تحقق أنّه لأجل كل $g\in G$ فإنّ المؤثر $\pi(g)$ واحدي على V، أي إذا تحققت العلاقة: $\langle\pi(g)(v),\pi(g)(w)\rangle=\langle v,w\rangle$

لأجل كل $v,w\in V$ و $g\in G$.

تعريف $(\mathbf{4})$: $[7],[\mathbf{14}],[4]$

يُطلق على الفضاء الجزئي المغلق $W\subset V$ بأنّه فضاء لا متغيّر بالنسبة لـ π إذا تحققت العلاقة:

$$\pi(g)W \subset W$$

لأجل كل $g \in G$.

تعريف (5): التمثيل غير القابل للاختزال: [4]

يُطلق على التمثيل π إنّه غير قابل للاختزال إذا لم يتواجد أي فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ π ومغلق تماماً, أي أن يكون الفضاء الجزئي اللا متغير والمغلق الوحيد هو فقط O إضافة إلى الفضاء V نفسه.

تعريف (6): [6], [17], [1]

لتكن $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ زمرة هايزنبرغ المزودّة بقانون التشكيل الآتي:

$$(z,t).(w,s) = \left(z + w, t + s + \frac{1}{2} Im(z.\overline{w})\right)$$

إن جبر لي الموافق $\mathfrak{h}_n$ يوَّلد بـ $(2n+1)$ حقل متجه معطاة بالشكل:

$$X_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$Y_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$T = \frac{\partial}{\partial t}$$

لذلك يسمّى المؤثر $\mathcal{L}$ المعرّف بالشكل:[8]

$$\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^{n} \left(X_j^2 + Y_j^2\right)$$

حيث X_j, Y_j هي الحقول المتجهة اللامتغيرة يسارياً التي سبق وعرفناها.

يُدعى هذا المؤثر بمؤثر لابلاس الجزئي على $\mathbb{H}^n$, و يُكتب بشكلٍ أكثر دقةً وفقاً للعلاقة:[5]

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\Delta_z - \frac{1}{4}|z|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N \frac{\partial}{\partial t}$$

حيث Δ_z هو مؤثر لابلاس على $\mathbb{C}^n$.

والمؤثر $N = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ هو مؤثر الدوران.[5]

و يمكن أن نكتب $\mathcal{L}$ بالشكل الآتي أيضاً:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(Z_j\overline{Z}_j + \overline{Z}_j Z_j\right)$$

حيث:

$$Z_j = X_j - iY_j$$

$$\overline{Z}_j = X_j + iY_j \quad ; j = 1,2,\dots,n$$

1.1. تحويل ريس:

و الآن لنعرّف تحويل ريس بالشكل: [6]

$$R_j = Z_j\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\overline{R}_j = \overline{Z}_j\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} \quad ; j = 1,2,\dots,n \tag{1.1}$$

وكما نرى فهو مرتبط مع مؤثر لابلاس الجزئي $\mathcal{L}$ على $\mathbb{H}^n$.

مبرهنة 1.1: [3]

ليكن $h \in \mathbb{R}$ عندئذٍ التطبيق π_h من زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n$ إلى فضاء المؤثرات الخطيّة المحدودة على $L^2(\mathbb{R}^n)$ المعرّف بالشكل:

$$\pi_h(x,y,t) := e^{i(htI + xQ + hyD)}$$

هو تمثيل واحدي لـ $\mathbb{H}^n$ على فضاء هيلبرت $L^2(\mathbb{R}^n)$, و يُدعى تمثيل شرودنجر مع الوسيط h.

ملاحظة (1): [3]

لدينا في العديد من الأبحاث أنّه من مبرهنة Stone_ Von Neumann فإنّ التمثيلات الواحديّة غير القابلة للاختزال, و غير المنتهيّة البعد للزمرة $\mathbb{H}^n$ و المؤثرة على $L^2(\mathbb{R}^n)$, يمكن تعريفها بأخذ وسطاء من $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. حيث لأجل $\lambda \in \mathbb{R}^*$ يُعرّف تمثيل شرودنجر الذي سنرمز له في بحثنا بالرمز π_λ للزمرة $\mathbb{H}^n$ بالشكل:

$$\pi_\lambda(x,y,t)\varphi(\xi) = e^{i\lambda t}e^{i\lambda\left(x\xi + \frac{1}{2}xy\right)}\varphi(\xi + y)$$

حيث $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ و $\xi \in \mathbb{R}^n$.

و بأخذ $\lambda = 1$ يكون: $\pi_1(x, y, t) = e^{it}\pi(z)$ حيث $z = x + iy$

حيث: $\pi(z)\varphi(\xi) = e^{i\left(x\xi+\frac{1}{2}xy\right)}\varphi(\xi + y)$

تعريف (7) دوال هرميت: [2]

لنبدأ بتعريف كثيرات حدود هرميت, لأجل ... $k = 0,1,2, \dots$ و $t \in \mathbb{R}$, نُعرّف كثيرة حدود هرميت $H_k(t)$ بالمعادلة:

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k}\{e^{-t^2}\}$$

عندئذٍ فإنّ دوال هرميت المنظمة تُعرّف بالشكل:

$$h_k(t) = \left(2^k\sqrt{\pi}k!\right)^{-\frac{1}{2}} H_k(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

إنّ هذه الدوال تُشكّل قاعدة متعامدة منظمة في الفضاء $L^2(\mathbb{R})$.

يُرمز لدوال هرميت ذات الأبعاد العليا بالرمز Φ_α, و يتم الحصول عليها بأخذ جداءات تنسوريّة. و بالتالي لأجل أي دليل متعدّد $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right)$ و لأجل $x \in \mathbb{R}^n$, فإنّنا نُعرّف:

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{n} h_{\alpha_j}\left(x_j\right) \quad ; x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

و عندئذٍ تكون $\{\Phi_\alpha\}$ قاعدة متعامدة للفضاء $L^2(\mathbb{R}^n)$. و هي دوال ذاتيّة لمؤثر هرميت موافقة للقيم الذاتيّة $(2|\alpha| + n)$: [16]

$$\mathrm{H} = -\Delta + |x|^2$$

حيث يكون: $\mathrm{H}\Phi_\alpha = (2|\alpha| + n)\Phi_\alpha;\ |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$

و هي أيضاً دوال ذاتيّة لتحويل فورييه $\mathcal{F}$ موافقة للقيم الذاتيّة $(-i)^{|\alpha|}$:

$$\mathcal{F}\Phi_\alpha = (-i)^{|\alpha|}\Phi_\alpha$$

تعريف(8) : [10]

نقول عن مؤثر A إنّه ضعيف من النوع (p, p) إذا وجد ثابت $c > 0$ بحيث تتحقق لأجل $\lambda > 0$ العلاقة الآتية:

$$|\{x \in G: |Af(x)| > \lambda\}| \leq c\,\frac{\|f\|_{L^p(G)}^p}{\lambda^p}$$

حيث $|\{.\}|$ يرمز إلى قياس هار على مجموعة في G.

ملاحظة (2): [6]

لقد تمت دراسة تحويلات ريس على زمرة هايزنبرغ من قبل العديد من الباحثين, و من المعروف أن R_j و $\overline{R_j}$ هي مؤثرات تكاملية شاذة, و بالتالي فإنها محدودة على $L^p(\mathbb{H}^n)$, حيث $1 < p < \infty$.
و كذلك فإنّ هذه المؤثرات من النوع الضعيف (1.1).
و علاوةً على ذلك فإنّ الحدود لهذه المؤثرات لا تتعلق ببعد الزمرة $\mathbb{H}^n$.

تعريف (9): زمرة هايزنبرغ المقلّصة (reduced Heisenberg group): [15, 17]

رمزها $\mathbb{H}^n_{red}$, و تُعرّف هذه الزمرة بالعلاقة:

$$\mathbb{H}^n_{red} = {}^{\mathbb{H}^n}/_{\Gamma}$$

حيث:

$$\Gamma = \{(0,2\pi k): k \in \mathbb{Z}\}$$

و هي زمرة جزئيّة مركزيّة.
و سنعتبر المؤثرات التي عرفنّاها سابقاً هي ذاتها المؤثرات المؤثرة على زمرة هايزنبرغ المقلّصة.

مبرهنة 1.2: [15]

لأجل كلّ $1 < p < \infty$, يوجد ثابت c_p مستقل عن البعد n, بحيث لأجل كل $f \in L^p\left({}^{\mathbb{H}^n}/_{\Gamma}\right)$, تتحقق المتراجحة:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left| R_j f \right|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left| \overline{R}_j f \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c_p \|f\|_p \qquad (1.2)$$

تعريف (10): [9]

ليكن $\Delta_z = \Delta_x + \Delta_y$ رمزاً لمؤثر لابلاس على $\mathbb{C}^n$ المطابقة لـ $\mathbb{R}^{2n}$, عندئذٍ نُعرّف التوافقية المجسّمة ثنائية التحدّر (bigraded solid harmonic), و من الدرجة (p, q) بأنّها دوال توافقية على $\mathbb{C}^n$ لها الصيغة:

$$P(z)=\sum_{|\alpha|=p}\sum_{|\beta|=q} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}$$

و نلاحظ أنّ $P(z)$ تحقق شرط التجانس:

$$P(\lambda z)=\lambda^{p}\bar{\lambda}^{q}P(z) \quad ;\forall\lambda\in\mathbb{C}$$

و لنُعرّف المجموعة:

$$\mathcal{H}_{p,q}=\{P\in\mathcal{P}_{p,q}:\Delta_z P=0\}$$

حيث $\mathcal{P}_{p,q}$ هو فضاء كل كثيرات الحدود P بـ z و $\bar{z}$ بالصيغة السابقة, وكذلك يكون:

$$\Delta_z=\sum_{j=1}^{n}\overline{\partial z_j}\partial z_j$$

حيث: $\partial z_j=\frac{1}{2}\left(\partial x_j-i\partial x_{n+j}\right)$

$$\overline{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\partial x_j+i\partial x_{n+j}\right)$$

إنّ عناصر $\mathcal{H}_{p,q}$ تُدعى توافقيات كرويّة ثنائية التحدّر (bigraded spherical harmonics).

ـ إنّ تحويلات ريس المعرّفة بالصيغ: $\left(X_j-iY_j\right)\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$ و $\left(X_j+iY_j\right)\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$ هي مضاريب لزمرة تحويل فورييه. [6]

يتمّ اعطاء المضاريب المقابلة بالشكل:

$$A_j(\lambda)H(\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$
$$A_j^{*}(\lambda)H(\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

على التوإلى.[6]

حيث لأجل $j=1,2,\dots,n$ و $\lambda\in\mathbb{R}$, فإنّ $A_j(\lambda)$ و $A_j^{*}(\lambda)$ هي المؤثرات المولّدة والعادمة المعرّفة بالشكل:

$$A_j(\lambda)=-\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\lambda\xi_j$$
$$A_j^{*}(\lambda)=\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\lambda\xi_j$$

وحيث:

$$H(\lambda)=-\Delta+\lambda^2|x|^2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(\lambda)A_j^{*}(\lambda)+A_j^{*}(\lambda)A_j(\lambda)\right)$$

هو مؤثر هرميت في $\mathbb{R}^n$. [6]

سنعتبر تحويلات ريس ذات الرتب العليا على $\mathbb{H}^n$, كمضاريب فورييه ذات الرتب العليا المقابلة لمثيلاتها من الشكل: $A_j(\lambda)H(\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ و $A_j^*(\lambda)H(\lambda)^{-\frac{1}{2}}$.

و علاوةً على ذلك فإنّ هذه المؤثرات تؤول إلى مؤثراتٍ شبه تفاضليّة من المرتبة صفر, و بالتالي فهي محدودة على $L^p(\mathbb{R}^n)$, حيث $1 < p < \infty$.

و قد تمّ أيضاً دراسة تحويلات ريس ذات الرتب العليا المرتبطة بمؤثر هرميت, و ذلك عن طريق تعريفها كمؤثرات من الصيغة:

$$A(\lambda)^\alpha H(\lambda)^{-\frac{1}{2}|\alpha|}$$

$$A^*(\lambda)^\alpha H(\lambda)^{-\frac{1}{2}|\alpha|}$$

حيث α هو دليل متعدّد, وحيث: $A(\lambda) = \left(A_j(\lambda)\right)$ و $A^*(\lambda) = \left(A_j^*(\lambda)\right)$, هي متجهات.

و هنا سنفرض المؤثرات : [15]

$$G_\lambda(P)H(\lambda)^{-\frac{m}{2}}$$

بأنّها عبارة عن التعبير المألوف لتحويلات ريس ذات الرتب العليا, حيث P هو توافقية مجسّمة ثنائية التحدّر (bigraded solid harmonic) على $\mathbb{C}^n$, و $G_\lambda(P)$ هو المؤثر المرتبط مع P وفق مقابلته بتحويل وايل, و ذلك بالشكل الآتي: [18]

لأجل $\lambda > 0$ فإنّه يكون:

$$G_\lambda(P)P_m(\lambda) = \lambda^n 2^{p+q}(-1)^p W_\lambda\left(P_{\varphi_{m-q,\lambda}^{n+p+q-1}}\right)$$

و لأجل $\lambda < 0$ فإنّه يتحقق:

$$G_\lambda(P)P_m(\lambda) = (-\lambda)^n 2^{p+q}(-1)^q W_\lambda\left(P_{\varphi_{m-q,\lambda}^{n+p+q-1}}\right)$$

حيث إنّ $m \in \mathbb{N}$, و يكون:

$$P_m(\lambda)f = \sum_{|\alpha|=m} \left(f, \Phi_\alpha^\lambda\right) \Phi_\alpha^\lambda$$

و

$$\Phi_\alpha^\lambda(x) = |\lambda|^{\frac{n}{4}} \Phi_\alpha\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}} x\right)$$

و حيث:

$$\varphi_{k,\lambda}^{n+p+q-1}(z) = L_k^{n+p+q-1}\left(\frac{1}{2}\lambda|z|^2\right) e^{-\frac{1}{4}\lambda|z|^2}$$

هي دوال لاجير من المرتبة $n + p + q - 1$.

إنّ الصف الأخير من المؤثرات التي تُعرّف تحويلات ريس يتضمّن الصف الذي سبقه, و ذلك لأنّ $P(z) =$ z^{α} و $Q(z) = \bar{z}^{\alpha}$, هي توافقيات مجسّمة ثنائية التحدّر من الدرجة $(|\alpha|, 0)$ و $(0, |\alpha|)$ على الترتيب.

هذا و تتحقق العلاقات الآتية: [11]

$$G_{\lambda}(P) = A(\lambda)^{\alpha}$$

$$G_{\lambda}(Q) = A^{*}(\lambda)^{\alpha}$$

مبرهنة 1.3: **[15]**

لأجل كلّ توافقية مجسّمة ثنائيّة التحدّر P, و من الدرجة الكليّة m, فإنّ المؤثر:

$$G_{\lambda}(P)H(\lambda)^{-\frac{m}{2}}$$

يكون محدوداً على $L^{p}(\mathbb{R}^{n})$, حيث $1 < p < \infty$. و هو ضعيف من النوع $(1,1)$.

مبرهنة 1.4: **[15]**

لأجل أيّ توافقيّة مجسّمة ثنائيّة التحدّر P, و من الدرجة الكليّة m, فإنّ المؤثر T_P المعرّف بالصيغة:

$$W_{\lambda}(T_{P}f) = W_{\lambda}(f)G_{\lambda}(P)H(\lambda)^{-\frac{m}{2}}$$

سيكون محدوداً على $L^{p}(\mathbb{C}^{n})$, حيث $1 < p < \infty$. و هو ضعيف من النوع $(1,1)$.

تعريف $(\mathbf{11})$:

إنّ مضاريب فورييه على زمرة هايزنبرغ هي أسرة من المؤثرات الخطيّة المحدودة $M(\lambda)$ على $L^{2}(\mathbb{R}^{n})$, و لنعرّف التحويل T_M بالشكل:

$$\pi_{\lambda}(T_{M}f) = \hat{f}(\lambda)M(\lambda)$$

حيث $\hat{f}(\lambda) = \pi_{\lambda}(f)$ هي مفهوم زمرة تحويل فورييه على زمرة هايزنبرغ.

_ و الآن نعتبر أنّ تحويلات ريس: [15]

$$G_{\lambda}(P)H(\lambda)^{-\frac{m}{2}}$$

كمضاريب لزمرة تحويل فورييه على زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^{n}$.

_ إنّ الزمرة الواحديّة $U(n)$ تؤثر على $\mathbb{H}^{n}$ بالأوتومورفيزم الذي يؤدي إلى التأثير على $L^{2}(\mathbb{H}^{n})$.

_ نعلم أنّ $\mathcal{H}_{p,q}$ يرمز لفضاء التوافقيات المجسّمة ثنائية التحدّر من الدرجة (p,q), و إنّ هذه التوافقيات تشكل دعامةً لتمثيلٍ واحديٍّ غير قابلٍ للاختزال $R(\sigma)$ على $U(n)$. [15]

ـ فيما يلي نرمز بـ $P_k(\lambda)$ للمسقط المعامد لـ $L^2(\mathbb{R}^n)$ المقابل للفضاء الذاتي الموافق للقيمة k على $H(\lambda)$.

ـ و لنرمز أيضاً بـ $\rho(\sigma)f$ لتأثير $\sigma \in U(n)$ على الدوال المعرّفة على $\mathbb{H}^n$, أي: [5]

$$\rho(\sigma)f(z,t) = f(\sigma^{-1}z,t) \qquad (1.3)$$

و لأجل $r > 0$ لنُعرّف التمديد غير الإيزوتروبي (nonisotropic): [5]

$$\delta_r f(z,t) = f(rz,r^2t) \qquad (1.4)$$

النتائج: قمنا بدراسة تحويلات ريس الشهيرة اعتماداً على مفهوم زمرة هايزنبرغ و مؤثر لاباس الجزئي المقابل لها, الذي هو مجموع مربعات المؤثرات التفاضلية من الحقول المتجهة اللامتغيرة يسارياً على هذه الزمرة, و توصلنا إلى أن هذه التحويلات تحقق حدوداً حرة البعد أي أننا بينا التقديرات حرة البعد لتحويلات ريس على زمرة هايزنبرغ, الأمر الذي يفيدنا باستخدام هذه المتباينات في العديد من الدراسات القادمة.

المناقشة:

تعريف (12): تحويلات ريس ذات الرتب العليا على زمرة هايزنبرغ: [15]

لأجل أيّ عددٍ حقيقيٍّ غير صفريٍّ λ يُعرّف تحويل وايل $W_\lambda(f)$ لدالّة f من $\mathbb{C}^n$, بالشكل:

$$W_\lambda(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\pi_\lambda(z,0)dz$$

حيث π_λ هو تمثيل شرودنجر على $\mathbb{H}^n$ مع الوسيط λ.

و عندئذٍ نُعرّف مقابلة وايل G_λ, بالشكل:

$$G_\lambda(f) = W_\lambda\big(\mathcal{F}_\lambda(f)\big)$$

حيث $\mathcal{F}_\lambda(f)$ هو تحويل فورييه التماسكي لـ f.

و من أجل دالّة f نصف قطريّة (radial), و P توافقيّة مجسّمة ثنائيّة التحدّر من الدرجة (p,q), و من أجل $\lambda > 0$ لدينا:

$$W_\lambda(Pf) = G_\lambda(P)\left(\sum_{k=p}^{\infty} R_{k-p}^{\lambda}(f)P_k(\lambda)\right)$$

حيث $P_k(\lambda)$ هي المساقط المرتبطة مع مؤثر هرميت $H(\lambda)$, و

$$R_k^\lambda(f) = \frac{\Gamma(k-p+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(k+q+n)}\int_{\mathbb{C}^{n+p+q}} f(|z|)\varphi_{k,\lambda}^{n+p+q-1}(z)dz$$

مبرهنة 1.5:

ليكن T مؤثراً لا متغيّر الانسحاب, يطبّق $L^2(\mathbb{H}^n)$ إلى $L^2\left(\mathbb{H}^n, H_{p,q}\right)$, و ليكن $M(\lambda)$ هو ضارب فورييه المقابل, و لنفرض العلاقات الآتيّة:

i. $R(\sigma)Tf(z,t) = \rho(\sigma)T\rho(\sigma^*)f(z,t)$

و ذلك لأجل كلّ $\sigma \in U(n)$.

ii. $T\delta_r f(z,t) = \delta_r Tf(z,t)$

و ذلك لأجل كلّ $r > 0$.

iii. $M(\lambda)P_k(\lambda) = \left((2k+n)|\lambda|\right)^{-\frac{1}{2}(p+q)}S(\lambda)$

و ذلك لأجل بعض المؤثرات غير المحدودة $S(\lambda)$.

عندئذٍ لأجل أيّ دإلى خطيٍّ B على $\mathcal{H}_{p,q}$, فإنّ المؤثر:

$$\mathrm{B}(T)f = B(Tf)$$

هو تركيب خطي لتحويلات ريس مع المضاريب:

$$G_\lambda(P)H(\lambda)^{-\frac{p+q}{2}}$$

حيث P يُعبَّر عنه من خلال قاعدة متعامدة من $\mathcal{H}_{p,q}$.

الإثبات:

إنّ المؤثر T هو مؤثر تلاف مع النواة التوزيعيّة $K(z,t)$, التي تأخذ قيمها في:

$$\mathcal{H}_{p,q}: Tf(z,t) = f * K(z,t)$$

لتكن المجموعة $\left\{Y_j : j = 1,2,\dots,d(p,q)\right\}$ قاعدةً متعامدةً لـ $\mathcal{H}_{p,q}$ مؤلّفةً من التوافقيات الكرويّة [6], و حيث $d(p,q)$ ترمز إلى بُعد $\mathcal{H}_{p,q}$. عندئذٍ يمكننا أن نكتب:

$$Tf(z,t) = \sum_{j=1}^{d(p,q)} T_j\, f(z,t)Y_j = \sum_{j=1}^{d(p,q)} f * K_j(z,t)Y_j \qquad (1.5)$$

الفرضيّة (i) و هي $\rho(\sigma)\,T\,\rho(\sigma^{-1})f = R(\sigma)\,T\,f$ تؤول إلى العلاقة:

$$R(\sigma)\,T\,f(z,t) = T\,\rho(\sigma^{-1})\,f(\sigma^{-1}z,t) = \sum_{j=1}^{d(p,q)} T_j\rho(\sigma^{-1})\,f(\sigma^{-1}z,t)Y_j$$

ليكن $\left(a_{i,j}(\sigma)\right)$ رمزاً للمصفوفة المقابلة لـ $R(\sigma)$ في القاعدة $\left\{Y_j : j = 1,2,\dots,d(p,q)\right\}$,

عندئذٍ يصبح لدينا العلاقة الآتيّة:

$$\sum_{j=1}^{d(p,q)} a_{i,j}(\sigma)T_j f(z,t) = T_i\, \rho(\sigma^{-1})\, f(\sigma^{-1}z,t) \tag{1.6}$$

و التي تعطينا بعد الحساب العلاقة:

$$f * \sum_{j=1}^{d(p,q)} a_{i,j}(\sigma)K_j(z,t) = f *\ \rho(\sigma^{-1})\, K_i(z,t) \tag{1.7}$$

و هذا ما يُبيّن أنّ:

$$R(\sigma)\, K(z,t) = \rho(\sigma^{-1})\, K(z,t) = K(\sigma z,t)\ ;\ \ \sigma \in U(n)$$

من هذه العلاقة نجد أنّه لأجل أيّ متجه واحدة $w \in \mathbb{C}^n$, فإنّ $K(w,t)$ ستكون كعنصر من $\mathcal{H}_{p,q}$, لا متغيّرةً تحت كلّ $\sigma \in U(n)$, ممّا يعيّن w.

لذلك فإنّه توجد دالّة ذات قيم سُلّميّة $c(w,t)$, بحيث:

$$k(w,t) = c(w,t)Y_w$$

حيث Y_w هي توافقيّة نطاقيّة (zonal harmonic) لها قطبٌ في w.

و لأجل أيّ متجه واحدة z, w يمكننا إيجاد $\sigma \in U(n)$, بحيث $\sigma z = w$.

و بالتالي فإنّ العلاقة:

$$R(\sigma)\, K(z,t) = K(\sigma z,t) = K(w,t)$$

تؤدي إلى العلاقة:

$$c(w,t)Y_w = R(\sigma)\, K(z,t) = c(z,t)\, R(\sigma)Y_z$$

و بأخذ قيمة كلٍ من الطرفين عند w, و بملاحظة أنّ:

$$R(\sigma)Y_z(w) = Y_z(z) = Y_w(w)$$

فإنّنا نجد أنّ $c(z,t)$ ثابت على طول $|z| = 1$, و بالتالي:

$$K(z,t) = c(t)\, Y_z$$

و ذلك لأجل كل $z \in S^{2n-1}$, حيث $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$.

و الآن إنّ الفرضيّة (ii) $\delta_r T = T\delta_r$, تؤول إلى التجانس:

$$K(rz, r^2 t) = r^{-2n-2} K(z,t)$$

و لذلك فإنّه لأجل أيّ $z \in \mathbb{C}^n$ يكون:

$$K(z,t) = |z|^{-2n-2} K\left(\frac{z}{|z|}, \frac{t}{|z|^2}\right) = |z|^{-2n-2}\, c\left(\frac{t}{|z|^2}\right)\, Y_{\frac{z}{|z|}}$$

ليكن P_j رمزاً للتوافقية المجسّمة المحققة للشرط:

$$P_j(z) = |z|^{p+q}\, Y_j\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

عندئذٍ فإنّنا نحصل على العلاقة الآتية:

$$K_j(z,t) = |z|^{-2n-p-q-2}\, c\left(\frac{t}{|z|^2}\right) P_j(z) = g_j(z,t)\, P_j(z) \qquad (1.8)$$

لاحظ أنّ $g_j(z,t)$ دالّة نصف قطريّة (radial function), تحقق شرط التجانس:

$$\delta_r\, g_j = r^{-2n-p-q-2}\, g_j$$

ليكن B دإلى خطيّ على $\mathcal{H}_{p,q}$, عندئذٍ تصبح لدينا العلاقة الآتيّة:

$$\mathrm{B}(Tf) = \sum_{j=1}^{d(p,q)} c_j T_j f = \sum_{j=1}^{d(p,q)} c_j\, f * K_j$$

إنّ المؤثر T_j هو مؤثر ضارب فورييه مع الضارب:

$$M_j(\lambda) = W_\lambda\left(K_j^\lambda\right)$$

و الذي يمكن حسابه باستخدام صيغة Hecke_ Bochner بالشكل الآتي:

من العلاقة:

$$K_j^\lambda(z) = g_j^\lambda(z) P_j(z)$$

تنتج العلاقة الآتية لأجل $\lambda > 0$:

$$W_\lambda\left(P_j g_j^\lambda\right) = G_\lambda\left(P_j\right)\left(\sum_{k=p}^{\infty} R_{k-p}^\lambda\left(g_j^\lambda\right) P_k(\lambda)\right) \qquad (1.9)$$

حيث:

$$R_k^\lambda\left(g_j^\lambda\right) = \frac{\Gamma(k-p+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(k+q+n)} \int_{\mathbb{C}^{n+p+q}} g_j^\lambda(z)\, \varphi_{k,\lambda}^{n+p+q-1}(z) dz$$

و حيث:

$$g_j^\lambda(rz) = r^{-2n-p-q}\, g_j^{\lambda r^2}(z)$$

كما أنّ:

$$R_k^{\lambda r^2}\left(g_j^{\lambda r^2}\right) = r^{-p-q}\, R_k^\lambda\left(g_j^\lambda\right)$$

و بالتالي:

$$R_k^\lambda\left(g_j^\lambda\right) = R_k^1\left(g_j^1\right) \lambda^{-\frac{(p+q)}{2}}$$

و بذلك فإنّنا نتبيّن أنّ الضارب $M_j(\lambda)$ له الصيغة:

$$M_j(\lambda) = G_\lambda\left(P_j\right)\left(\sum_{k=p}^{\infty} c_{k-p}\, P_k(\lambda)\right) \lambda^{-\frac{(p+q)}{2}} \qquad (1.10)$$

و أخيراً فإنّ الفرضيّة على $M_j(\lambda) P_k(\lambda)$ تُبيّن أنّ:

$c_{k-p} = (2k+n)^{-\frac{(p+q)}{2}}$ لأجل كلّ $k \geq p$.

و يمكن التحقق من أنّ: $G_\lambda(P_j)P_k(\lambda) = 0$, لأجل $k < p$.

و بالتالي نحصل على العلاقة:

$$M_j(\lambda) = G_\lambda(P_j)\, H(\lambda)^{-\frac{(p+q)}{2}}$$

و هذا ما يُتمّ الإثبات.

مبرهنة 1.6: **[15]**

لتكن $P \in \mathcal{H}_{p,q}$, و لنرمز بـ R_P لتحويل ريس من الرتبة العليا, مع الضارب:

$$G_\lambda(P)\, H(\lambda)^{-\frac{(p+q)}{2}}$$

و ليكن T مؤثراً يحقق الفرضيات المذكورة في المبرهنة السابقة, و ليكن β دالي خطيّ على $\mathcal{H}_{p,q}$, عندئذٍ فإنّ $\beta(T)$ يكون محدوداً على $L^p(\mathbb{H}^n)$ (حيث $1 < p < \infty$), ويكون من النوع الضعيف $(1,1)$, و ذلك تحت بعض الفرضيات على P.

في الواقع لتكن:

$$P_0(z) = z_j^p \overline{z_k}^q \; ; j \neq k$$

و لنرمز بـ $O(P_0)$ لمدار P_0 تحت تأثير $U(n)$, أي إنّ $O(P_0)$ هو مجموعة جميع $\rho(\sigma)P_0$.

و بالتالي نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.7: **[15]**

لأجل كل $P \in O(P_0)$, فإنّ تحويل ريس R_P يحقق التقدير:

$$\|R_P f\|_p \leq C_p \|f\|_p \qquad (1.11)$$

على $L^p(\mathbb{H}^n)$ (حيث $1 < p < \infty$), حيث C_p مستقل عن البعد n.

ملاحظة (3):

بأخذ $P \in \mathcal{H}_{p,q}$, و لنأخذ تحويل ريس من الرتبة العليا R_P المرتبط مع P وفق العلاقة: [4]

$$W(R_P f) = W(f) H^{-\frac{(p+q)}{2}} G(P)$$

حيث $W(f)$ هو تحويل وايل للدالّة f, و $G(P)$ هو مقابلة تحويل وايل لكثيرة الحدود P.

و كما سبق لدينا:

$$\rho(\sigma)f(z) = f(\sigma^{-1}z)$$

ترمز إلى تأثير $U(n)$ على الدوال.

و بأخذ التمثيل $\mu(\sigma)$ المعرّف بالشكل:

$$W\big(\rho(\sigma)f\big) = \mu(\sigma)W(f)\mu(\sigma)^*$$

و المؤثرات $\mu(\sigma)$ و $\sigma \in U(n)$ واحديّة على $L^2(\mathbb{R}^n)$.

و الآن لنقدّم المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.8: **[6]**

لأجل أي $\sigma \in U(n)$ لدينا:

$$\rho(\sigma)R_P f(z) = R_{\rho(\sigma)P}\big(\rho(\sigma)f\big)(z) \qquad (1.12)$$

الإثبات:

لدينا:

$$W\big(R_{\rho(\sigma^{-1})P}f\big) = W(f)H^{-\frac{(p+q)}{2}}G\big(\rho(\sigma^{-1})P\big)$$

$$= W(f)H^{-\frac{(p+q)}{2}}\mu(\sigma)^*G(P)\mu(\sigma)$$

حيث $\mu(\sigma)^*$ تبديلي مع $H^{-\frac{(p+q)}{2}}$.

و يمكن أن نكتب:

$$W\big(R_{\rho(\sigma^{-1})P}f\big) = \mu(\sigma)^*W\big(\rho(\sigma)f\big)H^{-\frac{(p+q)}{2}}G(P)\mu(\sigma)$$

و هذا يعني أنّ:

$$W\big(\rho(\sigma)R_{\rho(\sigma^{-1})P}f\big) = W\big(\rho(\sigma)f\big)H^{-\frac{(p+q)}{2}}G(P)$$

و هذا ما يُتمّ الإثبات.

الخلاصة: و بذلك نكون قد درسنا بعض الخصائص المهمة لتحويل ريس الشهير على زمرة هايزنبرغ, و قدمنا العديد من المتباينات التي توضح لنا الحدود حرة البعد لتحويلات ريس.

التوصيات: من هذه النتائج التي توصلنا إلىها يمكن دراسة تحويلات ريس المرتبطة بمؤثر هرميت الخاص و إثبات المتباينات المتعلقة بها, كما يمكن استنتاج متباينات القيم المتجهة للمتسلسلات من تحويلات ريس و المرتبطة بمؤثرات Grushin المعممة و مؤثرات لاجير.

المراجع:

1. سهى سلامة.: " دراسة في زمر لي و أهم الأمثلة عنها (زمرة هايزنبرغ) ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S191019, (2020).

2. سهى سلامة.: " دوال هرميت و دوال هرميت الخاصة اعتماداً على زمرة هايزنبرغ ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S201019, (2020).

3. سهى سلامة.: "دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S010719, (2019).

4. سهى سلامة.: " مبرهنات بإلى_ وينر لتحويل فورييه اعتماداً على زمرة هايزنبرغ ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S211019, (2020).

5. سهى سلامة.: " مؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ وخصائصه الطيفية ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S181019, (2020).

6. Boggarapu, P. and Thangavelu, S.: "Mixed norm estimates for the Riesz transforms on the Heisenberg group". *Indian institute of science*, Bangalore, India, (2015).

7. Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: "The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics". *Research program under the supervision of Dr. Hadi Salamasian*, university of Ottawa, (2015).

8. Dasgupta, A., Molahajloo, S. and Wong, M.W.: "The spectrum of the sub_ laplacian on the Heisenberg group". Tohoku Math. J. 63 (2011), 269_ 276.

9. De Bie, H., Sommen, F. and Wutzig, M.: "Plane wave formulas for spherical, complex and symplectic harmonics". *Progress in Mathematics*, Krijgslaan 281, Gent, Belgium, (2017).

10. Fischer, V. and Ruzhansky, M.: “Quantization on nilpotent Lie groups”. *Progress in Mathematics*, (2015).

11. Geller, D.: “Spherical harmonics, the Weyl transform and the Fourier transform on the Heisenberg group”. Canad. J. Math. 36 (1984), no. 4, 615_ 684.

12. Kisil, V.: “*The Heisenberg group in Mathematics and physics*”. University of Leeds, England, Varna, (2016).

13. Krantz, S.: “*Explorations in Harmonic Analysis with applications to complex function theory and the Heisenberg group*”. Birkhäuser, Boston, (2009).

14. Rottensteiner, D.: “Foundations of Harmonic analysis on the Heisenberg group”. *Progress for obtaining the academic degree: Master of science*, University of Vienna, (2010).

15. Sanjay, P.K. and Thangavelu, S.: “Revisiting Riesz transforms on Heisenberg groups”. Bangalore, India (2012).

16. Strichartz, R.S.: “Harmonic analysis as spectral theory of laplacians”. J. Funct. Anal. 87, 51_ 148 (1989).

17. Thangavelu, S.: “Harmonic analysis on the Heisenberg group”. *Progress in Mathematics* 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).

18. Thangavelu, S.:“ Poisson transform for the Heisenberg group and eigenfunctions of the sub-laplacian ”. *Indian institute of science*, Bangalore, India, (2006).

19. Woit, P.: “*Quantum theory, groups and representations: An introduction (final draft version)*”. Columbia university, (2017).