

دراسة مسألة من النمط الاول

"حل المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروطين الابتدائيين غير المتجانسين والشروط

الحددي غير المتجانس"

- أ.د. عبير مصطفى الهصيك استاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم - جامعة المرقب.
 أ.د. عائشة أحمد عامر استاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم - جامعة المرقب.
 د. ربيعة عبد الله الشبير محاضر قسم الرياضيات كلية العلوم - جامعة المرقب.

الملخص:

نستعرض في هذا الورقة المسألة الحدية غير المتجانسة في الشكل التالي:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

تحت تأثير:

شروطين ابتدائيين غير متجانسين:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

وشروط حددي غير متجانس:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \geq 0), \psi \in C^1(x \geq 0), f \in C^1, \varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = f(0, t) = 0$$

$$\mu \in C^2(t \geq 0), \mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$$

و يتم تعيين الحل للمسألة أعلاه في شكل دالة في متغيرين (x, t) وهي تتمثل في مجموع الحلين

$$u_1(x, t), u_2(x, t)$$

وذلك بالاستعانة: بالحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشرط الحدي المتجانس و المسألة الحدية المتجانسة بالشرط الحدي غير المتجانس، والاستكمال الفردي للدوال.

المختصرات:

المسألة الحدية (متجانسة - غير متجانسة) - شرطين ابتدائيين - شرط حدي - الاستكمال.

دراسة مسألة من النمط الاول

"حل المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروطين الابتدائيين غير المتجانسين والشروط الحدي غير

المتجانس"

المقدمة:

ندرس حل المسألة الحدية التالية :-

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty \quad . . . (*)$$

بالشروطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشروط الحدي:

$$u(0,t) = \mu(t) \quad , \quad t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \geq 0), \psi \in C^1(x \geq 0), f \in C^1, \varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = f(0,t) = 0$$

$$\mu \in C^2(t \geq 0), \mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$$

الحل العام هو مجموع الحلين كالتالي:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

حيث كلاً من $u_1(x,t), u_2(x,t)$ معرفة بالشكل التالي على التوالي :

$$u_1(x,t) : u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t), 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u_2(x,t) : u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشرطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t) = \mu(t) \quad , \quad t > 0$$

فالحل لـ $u_1(x,t)$ و هو يتمثل في الحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الابتدائية غير

المتجانسين و الشرط الحدي المتجانس كالتالي:

ندرس حل المسألة الحدية التالية:-

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + a^2 f(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty$$

بالشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$\varphi \in C^2(x \geq 0), \psi \in C^1(x \geq 0), f \in C^1, \varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = f(0,t) = 0$$

ندرس الدوال $\Phi(x), \Psi(x), F(x,t)$ اللاتي تعتبرن استكمال فردي للدوال

$\varphi(x), \psi(x), f(x,t)$ اللاتي تدخلن في الشروط الابتدائية:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x > 0 \\ -\varphi(-x), x < 0 \end{cases}, \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x > 0 \\ -\psi(-x), x < 0 \end{cases}, F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), x > 0 \\ -f(-x, t), x < 0 \end{cases}$$

الدالة التالية:-

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\alpha, \tau) d\alpha d\tau \dots (**)$$

معرفة لجميع قيم x و $t > 0$.

وبدراسة الدالة الناتجة $u(x, t)$ فقط للقيم $x \geq 0, t \geq 0$ نحصل على دالة تحقق جميع شروط

المسألة المصاغة أعلاه.

وكذلك يمكن صياغة الدالة $u(x, t)$ بالشكل الآتي :-

نناقش الحالتين :

$$\text{عند: } t < \frac{x}{a}, x > 0 \quad \text{وعند: } t > \frac{x}{a}, x > 0$$

$$\text{الحالة الأولى عند: } t < \frac{x}{a}, x > 0$$

$$t < \frac{x}{a} \Rightarrow x + at > 0, x - at > 0, x + a(t - \tau) > 0, x - a(t - \tau) > 0$$

$$x+at > 0 \Rightarrow \Phi(x+at) = \varphi(x+at) \quad , \quad x-at > 0 \Rightarrow \Phi(x-at) = \varphi(x-at)$$

أما

$$\int_{x-at > 0}^{x+at > 0} \Psi(\alpha) d\alpha = \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$$

و بالمثل

$$\int_{x-a(t-\tau) > 0}^{x+a(t-\tau) > 0} F(\alpha, \tau) d\alpha d\tau = \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau$$

بالتعويض عن Φ, Ψ, F في (***) نحصل على :-

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau$$

... (***)

الحالة الثانية عند: $t > \frac{x}{a}, x > 0$

$$t > \frac{x}{a}, x > 0 \quad , \quad x+at > 0, x-at < 0, x+a(t-\tau) > 0, x-a(t-\tau) < 0$$

$$x - at < 0 \Rightarrow \Phi(x - at) = -\varphi(-(x - at)) = -\varphi(at - x)$$

$$x + at > 0 \Rightarrow \Phi(x + at) = \varphi(x + at)$$

أما

$$\int_{x-at < 0}^{x+at > 0} \Psi(\alpha) d\alpha = \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$$

و بالمثل

$$\int_{x-a(t-\tau) < 0}^{x+a(t-\tau) > 0} F(\alpha, \tau) d\alpha d\tau = \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau$$

بالتعويض عن Φ, Ψ, F في (**) نحصل على :-

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau$$

... (***)

من (***) و (****) نحصل على الحل العام للمسألة الحدية غير المتجانسة بالشروطين الابتدائيين غير

المتجانسين والشروط الحدي المتجانس: -

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau, t < \frac{x}{a}, x > 0 \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau, t > \frac{x}{a}, x > 0 \end{cases}$$

والحل لـ $u_2(x,t)$ هو يتمثل في الحل العام للمسألة الحدية المتجانسة بالشروطين الابتدائيين المتجانسين

و الشرط الحدي غير المتجانس كالتالي:

ندرس حل المسألة الحدية التالية :-

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

بالشروطين الابتدائيين:

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

و الشرط الحدي:

$$u(0,t) = \mu(t) \quad , \quad t > 0$$

من الواضح أن النظام الحادي يحدث موجة تنتشر على امتداد الوتر إلى اليمين بسرعة a مما يجعلنا نتنبأ بالصورة التحليلية للحل:

$$u_2(x, t) = f(x - at)$$

نعين الدالة f من الشرط الحادي $u_2(0, t) = \mu(t), t > 0$ نحصل على:-

$$u_2(0, t) = f(-at) = \mu(t), t > 0$$

$$t = -\frac{z}{a} \Leftrightarrow z = -at \quad \text{نفترض أن:}$$

$$u_2(0, -\frac{z}{a}) = f(z) = \mu(-\frac{z}{a}), \frac{z}{a} < 0 \Rightarrow f(z) = \mu(-\frac{z}{a})$$

و منها:

$$u_2(x, t) = \mu(-\frac{x-at}{a}) = \mu(t - \frac{x}{a})$$

غير أن هذه الدالة معرفة فقط في المنطقة $x - at \leq 0$ لأن $\mu(t)$ معرفة للقيم $t \geq 0$

لتعيين $u_2(x, t)$ لجميع قيم المتغيرين المستقلين نستكمل الدالة $\mu(t)$ إلى القيم السالبة للمتغير t و

$$t < 0 \quad \mu(t) = 0 \quad \text{بفرض أن:}$$

و الحل لـ $u_2(x, t)$ هو حل المسألة الحدية المتجانسة بالشروطين الابتدائيين المتجانسين والشرط الحادي

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{غير المتجانس: -}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0, t < \frac{x}{a} \\ \mu(t - \frac{x}{a}), t \geq \frac{x}{a} \end{cases}$$

مجموع الدالتين $u_1(x,t), u_2(x,t)$ هو عبارة عن الحل العام للمسألة من النمط الاول "المسألة الحدية

غير المتجانسة بالشروطين الابتدائيين غير المتجانسين و الشرط الحدي غير المتجانس :-

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau, t < \frac{x}{a}, x > 0 \\ \mu(t - \frac{x}{a}) + \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau, t > \frac{x}{a}, x > 0 \end{cases}$$

. . . (*****)

• مثال تطبيقي:

عين حل المسألة الحدية التالية :-

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 64t^2 \quad ; \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{6}x \quad ; \quad u_t(x,0) = 2\sin x$$

$$u(0,t) = 4t^4$$

من الواضح أن المسألة المصاغة هي مسألة حدية غير متجانسة بالشروطين الابتدائيين غير المتجانسين و

الشرط الحدي غير المتجانس :-

بالمقارنة بالعلاقة (*) نحصل على:

$$a = 2 ; \quad f(x, t) = 16t^2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{6}x, \quad \psi(x) = 2\sin x, \quad \mu(t) = 4t^4$$

بالتطبيق في الحل العام للدالة (*****) نحصل على :-

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau, t < \frac{x}{a}, x > 0 \\ \mu(t-\frac{x}{a}) + \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\alpha, \tau) d\alpha d\tau, t > \frac{x}{a}, x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{1}{6}(x+2t)+\frac{1}{6}(x-2t)}{2} + \frac{1}{2.2} \int_{x-2t}^{x+2t} 2\sin \alpha d\alpha + \frac{1}{2.2} \int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} 16\tau^2 d\alpha d\tau, t < \frac{x}{2}, x > 0 \\ 4(t-\frac{x}{2})^4 + \frac{\frac{1}{6}(x+2t)-\frac{1}{6}(2t-x)}{2} + \frac{1}{2.2} \int_{2t-x}^{x+2t} 2\sin \alpha d\alpha + \frac{1}{2.2} \int_0^t \int_{2(t-\tau)-x}^{x+2(t-\tau)} 16\tau^2 d\alpha d\tau, t > \frac{x}{2}, x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{1}{2}(\cos(x+2t) - \cos(x-2t)) + 16 \int_0^t (t\tau^2 - \tau^3) d\tau, t < \frac{x}{2}, x > 0 \\ 4(t-\frac{x}{2})^4 + \frac{x}{6} - \frac{1}{2}(\cos(x+2t) - \cos(2t-x)) + 8 \int_0^t x\tau^2 d\tau, t > \frac{x}{2}, x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{6} + \sin x \cdot \sin 2t + 16 \left[\frac{1}{12} t^4 \right], t < \frac{x}{2}, x > 0 \\ \frac{1}{4} (2t-x)^4 + \frac{x}{6} + \sin x \cdot \sin 2t + 8 \left[x \frac{t^3}{3} \right], t > \frac{x}{2}, x > 0 \end{cases}$$

$$\therefore u(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \sin x \cdot \sin 2t + \frac{4}{3} t^4, t < \frac{x}{2}, x > 0 \\ \frac{1}{4} (2t-x)^4 + \frac{x}{6} + \sin x \cdot \sin 2t + \frac{8}{3} x t^3, t > \frac{x}{2}, x > 0 \end{cases}$$

هو الحل العام للمسألة الحدية المعطاة.

المراجع العربية:

- 1- أ. تيخونوف و أ. سامارسكي، معادلات الفيزياء الرياضية الجزء (1،2)، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفيتي- موسكو، 1984، ترجمة من الروسية: د. القرمانى أحمد.
- 2- د.ديفد . ل . باورز، مسائل القيم الحدية، الطبعة الاولى، دار إنتربرنت ليميتد للطباعة والنشر، مالطا، 1985، ترجمة : د. القرمانى أحمد - د. عوين علي.
- 3- ن. كشيلىكوف و أ. قلييف و م. سميرنوف، معادلات الفيزياء الرياضية الجزئية، 1970.
- 4- د.قاسيموف قربان - رازيف اعتيبار - شاحوت عياد، معادلات الفيزياء الرياضية، الطبعة الاولى، دار الخمس.
- 5- دله الزوام، المعادلات التفاضلية الجزئية للأقسام العلمية والهندسية، جامعة الفاتح- طرابلس، ليبيا، 1998م.
- 6- هب الريح أحمد، اساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية الجزء (1،2)، دار ومكتبة الشعب- مصراته، ليبيا 2004م.
- 7- رينشارد برونسون، سلسلة المسائل المحولة شوم في المعادلات التفاضلية، ترجمة: د- فوق العادة فايز.
- 8- موارى ر . شبيجل، سلسلة ملخصات شوم في الدوال المركبة و الرياضيات المتقدمة، ترجمة: د. العويضى حسن.

المراجع الأجنبية

- 1-E.A.Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equation Company New York Toronto / London - 1955.
- 2-W.T.Donald, Applied partial Differential Equation , The university of Manitoba PWS – Publishing Company – 1990 .
- 3- A.C.King , J.Billingham & S.R.Otto, Differential Equations First Edition – 2003, Print in the United Kingdom the university Press, Cambridge.